הרצאה 4

לוגיקה ותורת הקבוצות

קבוצות שאינן בנות מניה

Uncountable Sets

אוניברסיטת רייכמן

תזכורת על ההגדרות
והתוצאות שראינו

השוואת עוצמות

- $|A| = |B|$ $\quad f : A \longleftrightarrow B$ או $|A| \le |B|$ וגם $|B| \le |A|$
- $|A| \le |B|$ $\quad f : A \xrightarrow[\text{total}]{\text{1-1}} B$ או $g : B \xrightarrow{\text{onto}} A$
- $|A| < |B|$ $\quad |A| \le |B|$ וגם $|B| \not\le |A|$

$f : A \xrightarrow[\text{total}]{\text{1-1}} B$ וגם אין $g : B \xrightarrow[\text{total}]{\text{1-1}} A$

$|A| \le |B|$ וגם $|B| \ne |A|$ או

$f : A \xrightarrow[\text{total}]{\text{1-1}} B$ וגם אין $g : A \longleftrightarrow B$

קבוצות אינסופיות

- קבוצה A הינה אינסופית אם קיימת $S \subset A$, כך ש- $|S| = |A|$

או קיימת קבוצה אינסופית B, כך ש- $B \subseteq A$

או קיימת קבוצה אינסופית B, כך ש- $A \sim B$

או $|\mathbb{N}| \leq |A|$ (קיימת פונ' $f : \mathbb{N} \xrightarrow[\text{total}]{1\text{-}1} A$)

או קיימת קבוצה אינסופית B, כך ש- $|B| \leq |A|$

קבוצות בנות מניה

- $|\mathbb{N}| = \aleph_0$
- A הינה בת-מניה אם A סופית או שקולה ל-$\mathbb{N}$ ($|A| \le \aleph_0$)
  או שניתן למנות (לסדר) את איבריה: $A=\{a_n \mid n\in\mathbb{N}\}$
- מחלקת הקבוצות בנות המניה סגורה תחת:
  - איחוד: $A \cup B$
  - איחוד סופי: $\bigcup_{i=0}^{k-1} A_i$
  - איחוד בן-מניה: $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$
  - מכפלה קרטזית: $A\times B$ (למשל $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, המסומן גם $\mathbb{N}^2$)
  - מכפלה סופית: $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_k$ (למשל $\mathbb{N}^k$)
- $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$, $\{4,9,78\}$, $\varnothing$ הינן דוגמאות לקבוצות בנות מניה.

אינדוקציה על קבוצות בנות מניה

- ניתן להפעיל אינדוקציה בתוך כל קבוצה בת מניה.
  - האיברים ניתנים לסידור $A=\{a_n \mid n\in\mathbb{N}\}$. מוכיחים את הטענה למקרה הבסיס ולשלב המעבר.
  - השתמשנו באינדוקציה בכדי להוכיח טענות על כל איחוד סופי וכל מכפלה סופית של קבוצות.
- לא ניתן להשתמש באינדוקציה עבור חזרה אינסופית של פעולה.
  - לא יכולנו להשתמש באינדוקציה בכדי להוכיח את הטענה על איחוד בן-מניה של קבוצות. (השתמשנו בשיטה אחרת בהוכחה.)
  - אנחנו לא יכולים להוכיח באינדוקציה טענה לגבי מכפלה אינסופית של קבוצות.

היום ...

האם $P(\mathbb{N})$ בת-מניה?

$P(\mathbb{N})$

- איך נראות תתי הקבוצות של $\mathbb{N}$?
  - $\{1,3,4\}$, מספרים זוגיים, מספרים אי-זוגיים, מספרים ריבועיים, ...
- ניתן להסתכל על תת-קבוצה שכזו כסדרה אינסופית של 0/1 ("ביטים"), אשר מסמנת עבור כל מס' טבעי האם הוא בתת-הקבוצה (הביט 1) או לא (הביט 0). (על כן $P(\mathbb{N})$ מסומנת גם ע"י $2^{\mathbb{N}}$).

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	...
{1,3,4}:	0	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	...
Evens:	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	...
Odds:	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	...
Squares:	1	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	...

$P(\mathbb{N})$ איננה בת מניה

הוכחת הליכסון (diagonalization) של קנטור:

- נניח, בדרך השלילה, ש-$P(\mathbb{N})$ בת מניה.
- אזי, יש סידור $A_0,A_1,\ldots$ של תתי-הקבוצות של $\mathbb{N}$.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	…
A_0:	0	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	…
A_1:	1	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	…
A_2:	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	…
⋮														

- תהי $B\subseteq\mathbb{N}$ תת-הקבוצה של הטבעיים המיוצגת ע"י מחרוזת ה-0/1 המוגדרת ע"י:
  $B[n]=0$ אם הביט ה-n-י של A_n הוא 1, ו-1 אחרת.
  - בדוגמה, $B = 1\ 0\ 1\ \ldots$.

סתירה!

- הסידור $A_0,A_1,\ldots$ מכסה את כל תתי-הקבוצות של $\mathbb{N}$, ולכן קיים k, כך ש- $B=A_k$.
- אולם, הביט ה-k-י של B שונה מהביט ה-k-י של A_k!

האם $\mathbb{R}$ בת-מניה?

ייצוג מספרים ממשיים

- למספר ממשי $r \in \mathbb{R}$ לא תמיד קיים ייצוג עשרוני סופי (כמו 2.35) או ייצוג כמנה של שני מספרים טבעיים (כמו 2/3).
- אולם, תמיד קיים לו:
  - ייצוג עשרוני אינסופי (למשל, 3.14159265359..., 0.3333...)
  - ייצוג בינארי אינסופי (למשל, 11.101010101...)
  - ייצוג אינסופי בבסיס של מספר טבעי כלשהו (למשל, 0.024213... בבסיס 5).
- המספר הממשי שמיוצג הינו הערך אליו מתכנסת הסדרה של (המספרים הרציונליים) המיוצגים ע"י הרישות הסופיות של המחרוזת האינסופית.
  - 0.3333...(decimal) = limit (3/10, 33/100, 333/1000, ...)
  - 0.101010...(binary) = limit (1/2, 1/2, 5/8, 5/8, 21/32, ...)

ייצוג (כמעט) יחיד

משפטים ממתמטיקה (שנשתמש בהם מבלי להוכיח אותם):

יהי k מספר טבעי. ייצוג בבסיס k משתמש בספרות '0', '1', '2',..., 'k-1'.

משפט 1. ייצוג אינסופי $0.d_0\, d_1\, d_2\, d_3\, \ldots$ בבסיס k (d_i הינן הספרות) מתכנס למספר ממשי בין 0 ל-1.

משפט 2. לכל מספר ממשי יש:

- ייצוג יחיד בבסיס k, או
- בדיוק שני ייצוגים בבסיס k, כאשר באחד מהם יש רק את הספרה '0' ממיקום מסויים ואילך, ובאחר רק את הספרה 'k-1' ממיקום מסויים ואילך. (למשל בייצוג עשרוני, 0.10000... = 0.099999...).

$|\mathbb{R}|=|P(\mathbb{N})|$

משפט. $|\mathbb{R}|=|P(\mathbb{N})|$

הוכחה.

- ראינו ש- $|[0,1]|=|\mathbb{R}|$.
- נראה פונקציות $f:P(\mathbb{N})\xrightarrow[\text{total}]{1\text{-}1}[0,1]$ ו- $g:P(\mathbb{N})\xrightarrow{\text{onto}}[0,1]$, ומכך נקבל ש- $|P(\mathbb{N})|\le|[0,1]|$ וש- $|P(\mathbb{N})|\ge|[0,1]|$, בהתאמה.
- נזכר שאיברי $P(\mathbb{N})$ הינם תת-הקבוצות של $\mathbb{N}$, ושניתן להסתכל על כל תת-קבוצה שכזו כעל סדרה אינסופית I של אפסים ואחדים (ביטים).
- $f:P(\mathbb{N})\xrightarrow[\text{total}]{1\text{-}1}[0,1]$: לכל סדרה אינסופית I ב-$P(\mathbb{N})$, נגדיר $f(I)=0.I$, ונתייחס ל-$0.I$ כייצוג עשרוני אינסופי. מכאן ש-f מלאה וחח"ע, שכן $0.I$ מייצג מספר ממשי ב-$[0,1]$ (משפט 1) ושתי סדרות שונות שכאלו מייצגות מספרים שונים (משפט 2).
- $g:P(\mathbb{N})\xrightarrow{\text{onto}}[0,1]$: נגדיר $g(I)=0.I$, ונתייחס ל-$0.I$ כייצוג בינארי אינסופי. לפי משפט 2, לכל מספר ממשי בקטע $[0,1]$ יש ייצוג שכזה ולכן g הינה onto. □

הרציונליים לעומת הממשיים

- מדוע ההוכחה בשקף הקודם לא עובדת לגבי המספרים הרציונליים?
  - מכיוון שלא כל ייצוג עשרוני אינסופי מהצורה 0.I, כאשר I סדרה אינסופית של 0/1 מתכנס למספר רציונלי. חלק מייצוגים אילו, במידה מסויימת רובם, מתכנסים למספרים אי-רציונליים. בהתאם, הפונקציה f שהצגנו לא תהיה מלאה.

משפט ממתמטיקה (שלא נוכיח).

יהי k מספר טבעי. ייצוג אינסופי בבסיס k מייצג מספר רציונלי אמ"מ הייצוג מחזורי משלב מסויים (*eventually periodic*).

- כלומר, שמשלב מסויים, מחרוזת סופית מסויימת חוזרת לנצח. למשל:

0.33333..., 5.45678787878..., 23.56254254254...

The Continuum Cardinality עוצמת הרצף

- העוצמה של המספרים הממשיים, $|\mathbb{R}|$, נקראת *עוצמת הרצף* (*continuum cardinality*), ויש לה מספר סימונים:

$2^{\aleph_0}$ $\aleph$ c

$|\mathbb{R}| = |2^{\mathbb{N}}|$-מכיוון ש

מכיוון ש... נראה בהמשך

Continuum-מ

סגירות של מחלקת הקבוצות בעוצמה א תחת פעולות

משפטים:

- איחוד: אם $|A| =$ א ו- $|B| =$ א אז $|A\cup B| =$ א.
- איחוד סופי: אם $|A_1| =$ א, ..., $|A_k| =$ א אז $|A_1\cup\ldots\cup A_k| =$ א.
- מכפלה: אם $|A| =$ א ו- $|B| =$ א אז $|A\times B| =$ א.
- מכפלה סופית: אם $|A_1| =$ א, ..., $|A_k| =$ א אז $|A_1\times\ldots\times A_k| =$ א.
  - בפרט, לכל k טבעי, $|\mathbb{R}^k| =$ א.

הוכחות בשקפים הבאים

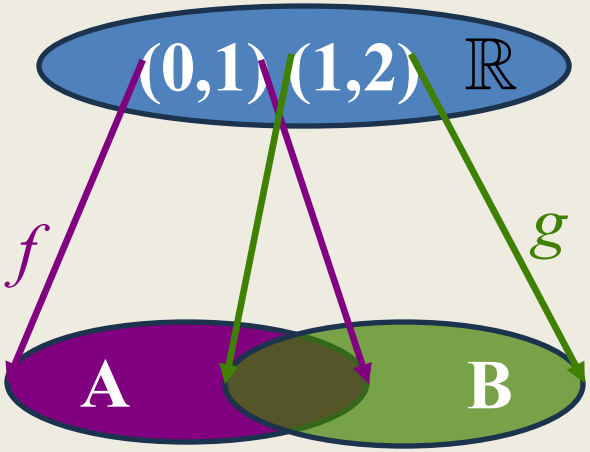
א' תוכ:

איחוד

משפט. אם A ו-B הינן קבוצות בעוצמה א אז כך גם $A\cup B$.

הוכחה. בעזרת משפט קש"ב.

- וודאי ש- $|A\cup B| \geq$ א, שכן $A \subseteq |A\cup B|$.
- כיוון ש-A ו-B בעוצמה א, ישנן פונקציות $f:(0,1)\to A$ ו-$g:(1,2)\to B$ על A ו-B, בהתאמה.
- נגדיר פונקציה $h:\mathbb{R}\to A\cup B$ מ-$\mathbb{R}$ ל-$A\cup B$:



$$h(x) = \begin{cases} f(x) & x \text{ in } (0,1) \\ g(x) & x \text{ in } (1,2) \end{cases}$$

- נוכיח ש-h הינה על $A\cup B$: (נא להשלים לבד...).
- מכאן ש-$|A\cup B| \leq |\mathbb{R}|$, ולכן $A\cup B$ בעוצמה א. $\square$

איחוד סופי

משפט. איחוד סופי של קבוצות בעוצמה א יוצר קבוצה בעוצמה א.
(לכל מס' טבעי k וקבוצות $A_0, \ldots, A_{k-1}$ בעוצמה א, הקבוצה $\bigcup_{i=0}^{k-1} A_i$ בעוצמה א.)
הוכחה.

נוכיח את טענת המשפט באינדוקציה על k.

- מקרה הבסיס: A_0 הינה קבוצה בעוצמה א מהנתונים.
- שלב המעבר:
  - הנחת האינדוקציה: הקבוצה $A_0 \cup \ldots \cup A_{k-1}$ בעוצמה א .
  - נראה שהקבוצה $A_0 \cup \ldots \cup A_{k-1} \cup A_k$ בעוצמה א:
    - נגדיר $B = A_0 \cup \ldots \cup A_{k-1}$.
    - נשים לב ש- $A_0 \cup \ldots \cup A_{k-1} \cup A_k = B \cup A_k$.
  - קיבלנו ש- $A_0 \cup \ldots \cup A_{k-1} \cup A_k$ הינה איחוד של שתי קבוצות בעוצמה א, ולכן בהתאם למשפט הקודם הינה בעוצמה א . □

כפל (שונה מהמצגת):

מכפלה

- ראינו שעוצמת הקטע (0,1) הינה א, וכן שעבור כל קבוצות A, A', B, B' כך ש- $|A| = |A'|$ ו- $|B| = |B'|$, מתקיים ש- $|A \times B| = |A' \times B'|$.
- מספיק על-כן להראות ש- $|(0,1) \times (0,1)| =$ א.
- נראה זאת בעזרת קש"ב.
- וודאי ש- $|(0,1) \times (0,1)| \geq$ א, למשל ע"י הפונקציה המלאה והחח"ע $f:(0,1) \to (0,1) \times (0,1)$, המוגדרת ע"י $f(x) = (x, ½)$.
- נראה ש- $|(0,1) \times (0,1)| \leq$ א ע"י פונקציה מלאה וחח"ע $g:(0,1) \times (0,1) \to (0,1)$, המוגדרת באופן הבא.
  - עבור $(a,b) \in (0,1)\times(0,1)$, יהיו $0.(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ ו- $0.(b_i)_{i\in\mathbb{N}}$ הייצוגים העשרוניים (האינסופיים) של a ו-b, כאשר לא משתמשים בייצוגים המסתיימים ב-'9' לנצח.
  - כלומר

$$a = 0.\,a_0\,a_1\,a_2\,a_3\,a_4\,a_5\,\ldots$$
$$b = 0.\,b_0\,b_1\,b_2\,b_3\,b_4\,b_5\,\ldots$$

E.g., $a = 0.79543218\ldots$, $b = 0.54327631\ldots$

  - נגדיר $g(a,b) = 0.(a_i\,b_i)_{i\in\mathbb{N}}$, כלומר $g(a,b) = 0.a_0b_0a_1b_1a_2b_2a_3b_3\ldots$

- הגדרנו $g(a,b) = 0.(a_i\, b_i)_{i\in\mathbb{N}}$, כלומר $g(a,b) = 0.a_0b_0a_1b_1a_2b_2a_3b_3\ldots$
- הפונקציה g מלאה שכן היא מוגדרת לכל איברי $(0,1)\times(0,1)$, ותמונתה ב-$(0,1)$.
- הפונקציה g חח"ע:
  - עבור שני זוגות שונים $(a,b) \neq (a',b')$ ב-$(0,1)\times(0,1)$, בהכרח $a\neq a'$ או $b\neq b'$.
  - על כן קיים אינדקס i, כך ש-$a_i\neq a'_i$ או $b_i\neq b'_i$.
  - בהתאם, הייצוגים העשרוניים $0.(a'_i\, b_i)_{i\in\mathbb{N}}$ ו- $0.(a'_i\, b'_i)_{i\in\mathbb{N}}$ שונים, ובשניהם אין 9' לנצח. על-כן הם מייצגים מספרים שונים, ומכאן ש- $g(a,b) \neq g(a',b')$.
- האם g הינה על?
- לא (אך אין צורך בכך להוכחה). □

מכפלה סופית

משפט. מכפלה סופית של קבוצות בעוצמה א יוצרת קבוצה בעוצמה א.
(לכל מס' טבעי k וקבוצות בעוצמה א $A_0, \ldots, A_{k-1}$, הקבוצה $A_0\times\ldots\times A_{k-1}$ בעוצמה א.)

הוכחה.

נוכיח את טענת המשפט באינדוקציה על k.

- מקרה הבסיס: A_0 הינה קבוצה בעוצמה א מהנתונים.
- שלב המעבר:
  - הנחת האינדוקציה: הקבוצה $A_0\times\ldots\times A_{k-1}$ בעוצמה א.
  - נראה שהקבוצה $A_0\times\ldots\times A_{k-1}\times A_k$ בעוצמה א:
    - נגדיר $B = A_0\times\ldots\times A_{k-1}$.
  - נשים לב ש- $A_0\times\ldots\times A_{k-1}\times A_k = (A_0\times\ldots\times A_{k-1})\times A_k = B\times A_k$.
  - קיבלנו ש- $(A_0\times\ldots\times A_{k-1})\times A_k$ הינה מכפלה של שתי קבוצות בעוצמה א, ולכן בהתאם למשפט הקודם הינה בעוצמה א. □

רמות של אינסוף

$|P(S)| > |S|$

משפט קנטור. לכל קבוצה S, מתקיים ש- $|P(S)|>|S|$.

הוכחה.

- אנחנו יודעים ש- $|S|\le|P(S)|$.
  - ראו תרגול / שיעורי הבית.
- נניח, בדרך השלילה, ש- $|P(S)|\le|S|$.
- אזי ישנה פונקציה f מ- S על $P(S)$.
- נגדיר את תת-הקבוצה D של S ע"י: $D=\{x\in S \mid x\notin f(x)\}$. (*)
  (זו הגדרה חוקית, שכן מתייחסים לתת-קבוצה של S.)
- מכיוון ש- $D\in P(S)$, ו- f פונקציה על, יש איבר $a\in S$, כך ש- $D=f(a)$. (**)
- כעת, האם $a\in f(a)$?
  - אם $a\notin f(a)$ אז לפי (*) נקבל ש- $a\in D$. לפי (**), $D=f(a)$, ולכן $a\in f(a)$.
  - אם $a\in f(a)$ אז לפי (*) נקבל ש- $a\notin D$. לפי (**), $D=f(a)$, ולכן $a\notin f(a)$.

סתירה!

פרדוקס קנטור

- אכן, הוכחת קנטור מזכירה את פרדוקס ראסל.
  - ראסל הגיע לפרדוקס שלו לאחר שקרא את הוכחת משפט קנטור.
- קנטור מצא כבר ב-1899 את הפרדוקס הבא של תורת הקבוצות הנאיבית המבוסס על ההוכחה שלו.
- פרדוקס קנטור. לא קיימת קבוצת כל הקבוצות.

הוכחה.

- נניח, בדרך השלילה, שקיימת קבוצה A של כל הקבוצות.
- לפי משפט קנטור, $|P(A)|>|A|$.
- כל האיברים אשר ב-P(A) הינן קבוצות (בתורת הקבוצות ה-"טהורה", כל איבר הינו קבוצה).
- מכאן שכל איבר של P(A) הינו איבר של A. כלומר, $P(A) \subseteq A$.
- לכן $|P(A)| \leq |A|$. סתירה. $\square$

Continuum Hypothesis השערת הרצף

- לפי משפט קנטור, קיימות אינסוף דרגות של אינסוף:

$$\mathbb{N}, \quad P(\mathbb{N}), \quad P(P(\mathbb{N})), \quad \ldots$$

$$\aleph_0 \qquad 2^{\aleph_0} \qquad 2^{2^{\aleph_0}}$$

- נסמן ב- $\aleph_1$ את העוצמה הקטנה ביותר שגדולה ממש מ- $\aleph_0$ (אם יש כזו).
- נסמן ב- $\aleph_2$ את העוצמה הקטנה ביותר שגדולה ממש מ- $\aleph_1$ (אם יש כזו), וכו'.

השערת הרצף Continuum hypothesis (CH)

- הטענה ש: $2^{\aleph_0} = \aleph_1$
  - כלומר, הטענה שאין אף קבוצה S, כך ש- $|\mathbb{N}| < |S| < |\mathbb{R}|$.

השערת הרצף המוכללת Generalized Continuum hypothesis (GCH)

- הטענה שלכל i, $2^{\aleph_i} = \aleph_{i+1}$.
  - כלומר, שלא קיימות קבוצות אינסופיות S ו- S', כך ש- $|S| < |S'| < |2^S|$.

אי-התלות של ההשערות (Independence)

- קנטור הציג את השערת הרצף ב-1878.

- הסוגיה האם ההשערה נכונה הוגדרה ע"י הילברט כבעיה מס' 1 למאה ה-20.

- ב-1940 הראה קורט גדל שהשערת הרצף עקבית עם ZFC.
- ב-1964 הראה פול כהן ששלילת ההשערה עקבית עם ZFC.

מכאן שהשערת הרצף (וכן השערת הרצף המוכללת) בלתי תלויה ב-ZFC: יש מערכת של תורת הקבוצות המרחיבה את ZFC בה ההשערה נכונה ומערכת אחרת המרחיבה את ZFC בה ההשערה לא נכונה.

דוגמאות לעוצמות של קבוצות מוכרות

- עוצמה סופית
  - $|\emptyset|=0$; $|\{x,y,z\}|=3$; $|\{a, \{b,c,d\}\}|=2$

- עוצמה אינסופית, אך בת-מניה ($\aleph_0$)
  - Even numbers, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}^k$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}^k$

- עוצמת הרצף (c , $\aleph$, $2^{\aleph_0}$)
  - כל קטע ממשי (x,y), $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^k$, $\mathbb{C}$

- מעבר לעוצמת הרצף
  - קבוצת תתי-הקבוצות של המספרים הממשיים. $|P(\mathbb{R})| = 2^{\aleph}$

אז מה היה לנו פה

- האלכסון של קנטור: הקבוצה $P(\mathbb{N})$ איננה בת-מניה.
- עוצמת הרצף $|\mathbb{R}| = c = 2^{\aleph_0} =$ א
- סגירות של מחלקת הקבוצות בעוצמת הרצף תחת פעולות.
- משפט קנטור: לכל קבוצה S מתקיים ש- $|P(S)|>|S|$.
- פרדוקס קנטור: אין קבוצת כל הקבוצות.
- השערת הרצף: אין קבוצה S, כך ש- $|\mathbb{N}|<|S|<|\mathbb{R}|$.
- אי-תלות השערת הרצף ב-ZFC.